

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad e = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \rightarrow e^1$$

$x_n \rightarrow \infty$

$$\left(\frac{n+1}{n-2}\right)^n = \left(\frac{n \cdot \left(1 + \frac{3}{n-2}\right)}{n \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right)}\right)^n = \left(\frac{1 + \frac{3}{n-2}}{1 - \frac{2}{n}}\right)^n \rightarrow \frac{e^3}{e^2} = e^1$$

weiter mit Landa

$$T(n) = 3n^2 - 2n^2 \cdot \lg n + 7$$

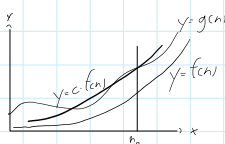
wichtig

2. Die Groß O Notation

Für Folge $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert man die Klasse $\mathcal{O}(f)$

$$\mathcal{O}_c(f) = \{g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists c > 0 \exists n_0 \forall n > n_0: |g(n)| \leq c \cdot |f(n)|\}$$

Funktionen (Folgen) die sich durch f nach oben beschränken lassen



Bemerkung:

eigentlich statt $g \in \mathcal{O}(f)$ schreibt man auch

$$g = \mathcal{O}(f) \quad \text{oder} \quad g(n) = \mathcal{O}(f(n))$$

 $g(n)$ ist groß O von $f(n)$

Kriterium:

K1 Ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = a \in \mathbb{R}$

dann ist $g(n) = \mathcal{O}(f(n))$

K2 Ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = \pm \infty$

dann ist $g(n) \neq \mathcal{O}(f(n))$

Beweis von K1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = a$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|g(n)|}{|f(n)|} = |a|$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n > n_0$$

$$\left| \frac{|g(n)|}{|f(n)|} - |a| \right| < \varepsilon$$

$$= \left| \frac{|g(n)|}{|f(n)|} - |a| \right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{|g(n)|}{|f(n)|} < \varepsilon + |a| \quad | \cdot |f(n)|$$

$$|g(n)| < (\varepsilon + |a|) \cdot |f(n)|$$

$$\Rightarrow g(n) = \mathcal{O}(f(n))$$

Beweis von K2

$$\text{Vor. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = \pm \infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|g(n)|}{|f(n)|} = \infty$$

$$\text{Beh. } g(n) \neq \mathcal{O}(f(n))$$

$$\text{Bew. z.z. } \forall c > 0 \forall n_0 \exists n > n_0: |g(n)| > c \cdot |f(n)|$$

$$\forall \varepsilon \exists n_0 \forall n > n_0: \left| \frac{g(n)}{f(n)} \right| > \varepsilon$$

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = \infty \right)$$

$$c = \varepsilon$$

$$\forall c > 0 \forall n_0 \exists n > n_0: \frac{g(n)}{f(n)} > c$$

$$: |g(n)| > c \cdot |f(n)|$$

Beispiele:

$$a) 5n^3 - 7n^2 + 70 = \mathcal{O}(n^3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3 - 7n^2 + 70}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} 5 - \frac{7}{n} + \frac{70}{n^3} = 5 \in \mathbb{R}$$

K1

$$\Rightarrow 5n^3 - 7n^2 + 70 = \mathcal{O}(n^3)$$

$$b) \quad n^3 = O(5n^2 - 7n + 70)$$

$$\text{da } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{5n^2 - 7n + 70} = \frac{1}{5} \in \mathbb{R}$$

$$c) \quad n^3 = O(n^2)$$

$$\text{da } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty \notin \mathbb{R}$$

$$d) \quad n^4 \neq O(n^3)$$

$$\text{da } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4}{n^3} = \infty$$

$$e) \quad g(n) = O(1) \Leftrightarrow \exists c \exists n_0 \stackrel{\text{fakt.}}{\forall n > n_0} : |g(n)| \leq c$$

$$\Leftrightarrow \exists d > 0 \forall n : |g(n)| \leq d$$

$\Leftrightarrow g(n)$ ist beschränkt

Rechenregeln

$$R1: \quad g_1(n) = O(f_1(n)) \quad g_2(n) = O(f_2(n)) \Rightarrow g_1(n) + g_2(n) = O(\max\{f_1, f_2\})$$

$$g_1(n) = O(f_1(n)) \Rightarrow g_1(n) \cdot g_2(n) = O(f_1(n) \cdot f_2(n))$$

$$R2: \quad c \cdot f(n) = O(f(n))$$

$$R3: \quad h(n) = O(g(n)), \quad g(n) = O(f(n))$$

$$\text{dann ist } h(n) = O(f(n))$$

$$R4: \quad g(n) = O(f(n)) \Leftrightarrow |g(n)| \leq O(f(n))$$

Beispiele:

$$g(n) = 5n \cdot g_1(n) + (n-1) \cdot g_2(n)$$

$$\text{Dann gilt: } g_1(n) = O(n), \quad g_2(n) = O(n^2)$$

$$g(n) = 5n \cdot O(1) + (n-1) \cdot O(n^2)$$

$$\stackrel{5n = O(n)}{n-1 = O(n)} \Rightarrow O(n) \cdot O(n) + O(n) \cdot O(n^2)$$

$$\stackrel{R1}{=} O(n) + O(n^3)$$

$$\stackrel{R2}{=} O(n^3)$$

Achtung

ist $g(n) = O(n)$ so ist $g(n) = O(n^2)$ da $O(n) \subseteq O(n^2)$

Es gilt aber nicht $O(n) = O(n^2)$ weil $O(n^2) \not\subseteq O(n)$

$$n^3 \neq O(n)$$

Laufzeiten:

$$g(n) = \text{Laufzeit}$$

$$O(n) = \text{konstant}$$



Beweis zu R3

$$\exists c_1 \exists n_1 \forall n > n_1 : |h(n)| \leq c_1 |g(n)|$$

$$\exists c_2 \exists n_2 \forall n > n_2 : |g(n)| \leq c_2 |f(n)|$$

$$\exists c_3 \exists n_3 \forall n > n_3 : |h(n)| \leq \underbrace{c_1 \cdot c_2}_{c_3} |f(n)|$$

$$n_3 = \max\{n_1, n_2\}$$

$O(1)$	Konstant	😊
$O(\log n)$	Logarithmisch (as 1)	
$O(n)$	Linear	
$O(n \log n)$	überlinear	
$O(n^2)$	Quadratisch	
$O(n^k)$	Polynomial	
$O(a^n)$	Exponentiell	😞

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{1}{\log_c a} \cdot \log_c b$$

$$O(1) \subset O(\log n) \subset O(n \log n) \subset O(n^2) \subset O(n^k) \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} O(n^k) \subset O(a^n) \subset O(n!) \subset O(n^n)$$

3. Weitere Landau-Symbole

a) $\Omega(f) = \{g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \in O(g)\}$ Groß-Omega (Atomp./s/Buttlog)

b) $\Theta(f) = O(f) \cap \Omega(f)$ Groß-Theta (Ei mit Risik)

c) $\mathcal{O}(f) = \{g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 0\}$ klein-O

d) $\omega(f) = \{g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \in \mathcal{O}(g)\}$ klein-Omega

e) $g \sim f \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 1$ Schlänge (Wurm)

g und f sind asymptotisch gleich

Bemerkung Statt $g \in \Omega(f)$ $g \in \omega(f)$

schreibt man wieder $g = \Omega(f)$ $g = \omega(f)$

Kriterium

K3 $g(n) = \Omega(f(n)) \Leftrightarrow f(n) = \mathcal{O}(g(n))$

K4 $g(n) = \Theta(f(n)) \Leftrightarrow g(n) = \mathcal{O}(f(n))$ und $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$

K5 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|g(n)|}{|f(n)|} = \begin{cases} 0 & g = \mathcal{O}(f), f \neq \mathcal{O}(g), g = \mathcal{O}(f), f \neq \mathcal{O}(g), g \neq \Theta(f) \\ > 0 & g = \Theta(f), f = \Theta(g), g = \Omega(f), f = \Omega(g), g = \Omega(f) \\ \infty & f = \mathcal{O}(g), g \neq \omega(f), f = \mathcal{O}(g), g = \omega(f) \end{cases}$

Beispiel:

Sei p Polynom vom Grad k , d.h. so gilt

$$p(n) = \mathcal{O}(n^k), \text{ d.h. } p(n) = \mathcal{O}(n^k) \text{ und } n^k = \mathcal{O}(p(n))$$

Insbesondere ist $\mathcal{O}(p(n)) = \mathcal{O}(n^k)$

$$p(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_0 n^0$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n)}{n^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_k + \frac{a_{k-1}}{n} + \frac{a_{k-2}}{n^2} + \dots + \frac{a_0}{n^k} = a_k \neq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{|p_{cn}|}{n^i} = |a_i| > 0$$

$$\stackrel{K5}{\Rightarrow} |p_{cn}| = O(n^i)$$

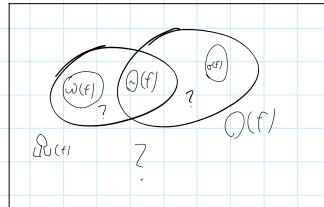
Regeln:

$$K5 \quad g_{cn} = O(f_{cn}) \stackrel{K1}{\Leftrightarrow} g_{cn} = O(|p_{cn}|)$$

$$K6 \quad g_{cn} \sim f_{cn} \stackrel{K5}{\Leftrightarrow} g_{cn} = O(f_{cn})$$

$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

alle Folgen



4. Stirlingsche Formel

$$a) \quad n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$$b) \quad n! = \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{12n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

↑
???